

第11回流砂・河床変動に関する若手勉強会

日時：2024年3月7日（木）、3月8日（金）

場所：琉球大学 工学部2号館 2-504教室

特別講演 15:50-17:35

仲座 栄三（琉球大）

「水理学・流体力学で説明されるNavier-Stokes方程式が  
誤りであることを自らの手で証明し、  
日本発の基礎方程式を世界に発信しよう」

## 物理学の鉄則：

「導かれた理論の正しさは、実験や観測によって実証される」

## 本研究による教訓：

そうではない。

「導かれた理論が、実験値や観測値と一致したからといって、その理論が正しいということの証明にはならない」

研究者は、総合職たれ

弾性理論のHookeの法則の修正の説明から  
始め、流体力学の基礎理論Navier-Stokes方  
程式の修正を説明する。続けて、ニュートン  
の運動法則の修正を提示する。

以上のことをまとめ、  
力学の新たな基礎理論を提示したい。

## ロバート・フック (Robert Hooke, 1635-1703)

1678年(43歳)、論文〈ばねについて〉が出版された。その内容は弾性体に関するフックの実験結果であり、これが材料の弾性について初めて出版された論文である。

「バネの自然状態よりの変位とか間隙の大きさと、バネを自然の位置にもどそうとする力とは比例する。」この法則はバネについてのみ観測されるというものではなく、金属、木、石、れんが、毛髪、角、絹、骨、筋肉、ガラスなどのすべての弾力性のある物体についていえることである。また曲げを受けた物体の形や曲げる方法によらず、やはりあてはまる。

この力と変形の線形関係はいわゆるフックの法則であり、その後弾性体力学の発展の基礎となった。

地球の中心から遠く離れたとき、物体が地球の中心へ向かう力を失わないかどうかを調べるために、私は天秤を作った。

材料力学史：S. P. ティモシェンコ著、最上武雄＝監訳／川口昌宏＝訳  
鹿島出版、431p.、1974。

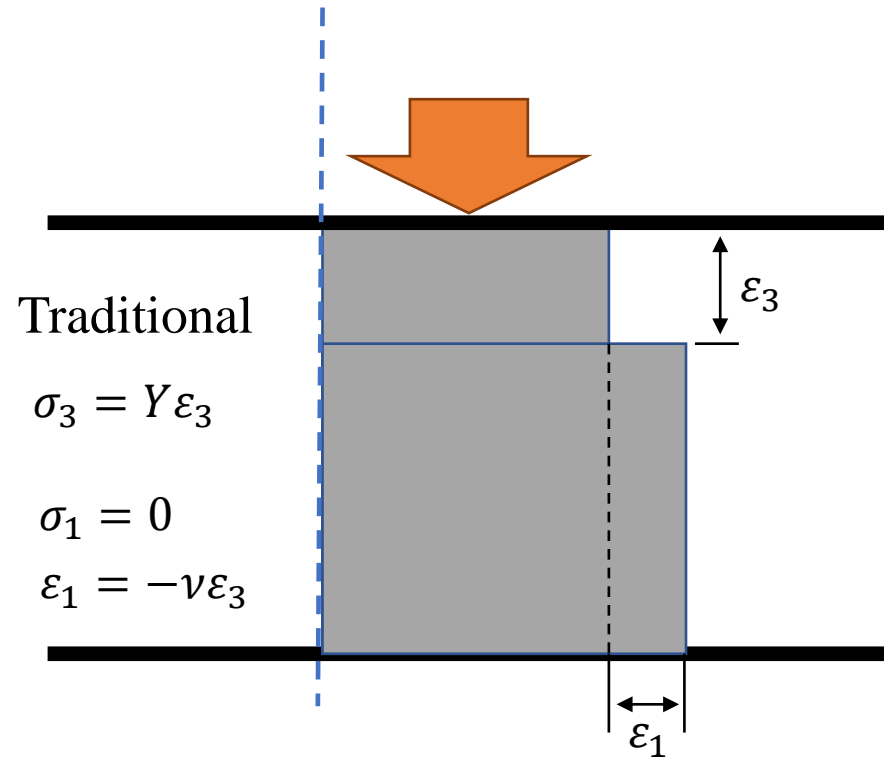
## フックの法則について

教室では**まことしやかに**、次のように説明されるのが一般的となっている。

右図に示すような材料の一軸圧縮を考えると、**フックの法則**（歪みは応力に線形比例する）は、まず縦方向について、次のように書ける。

$$\sigma_3 = Y \varepsilon_3 \quad (1)$$

ここに、 $\sigma_3$ は縦方向の主応力、 $\varepsilon_3$ は主歪み、 **$Y$ はヤング率**を表す。



横・奥方向については、**ポアソン比 $\nu$** を導入して、次の関係式が与えられる。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_3 \quad (2)$$

## 何が問題なのか？

我々は、これまで、式(1)及び式(2)の導入を当然としてきた。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_3 \quad (2)$$

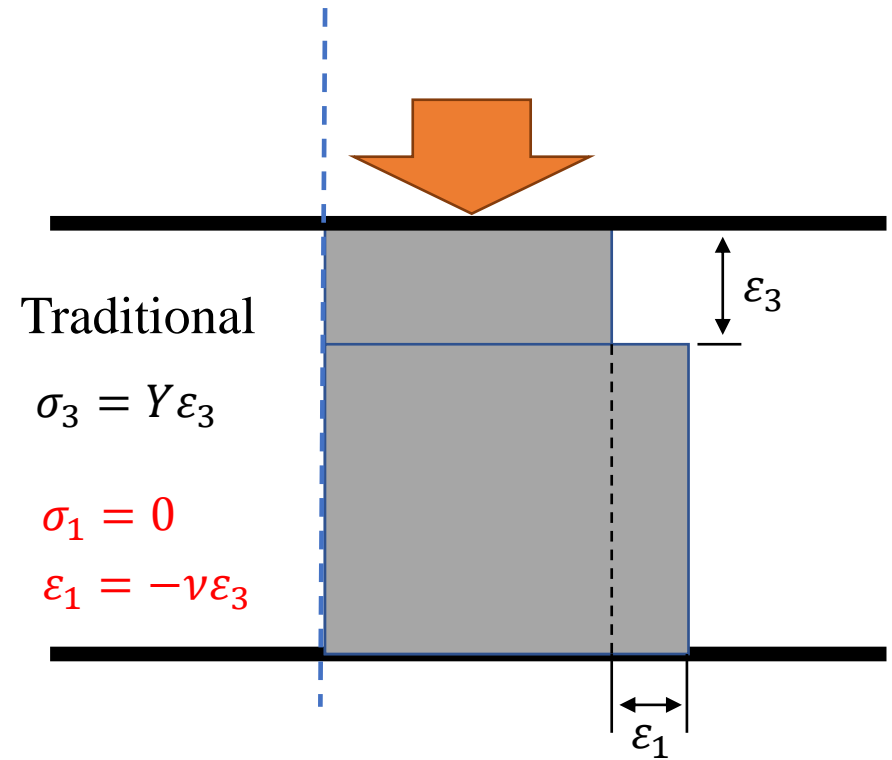
式(2)の導入は、材料の等方性を仮定している。また、 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ で（応力に無関係に）等歪みが現れるとしている。

等歪みが応力に無関係に現れるのなら、材料の等方性によって、その効果は縦方向にも現れていなければならない。

よって、応力と歪みが比例し、

$$\sigma_3 = Y\varepsilon_3 \quad (1)$$

と書けることは当然とはならない。



すなわち、式(1)と式(2)とは互いに矛盾している。

さらに、式(1)は力学をなすが、式(2)は力学をなさない、という問題をもはらんでいる。

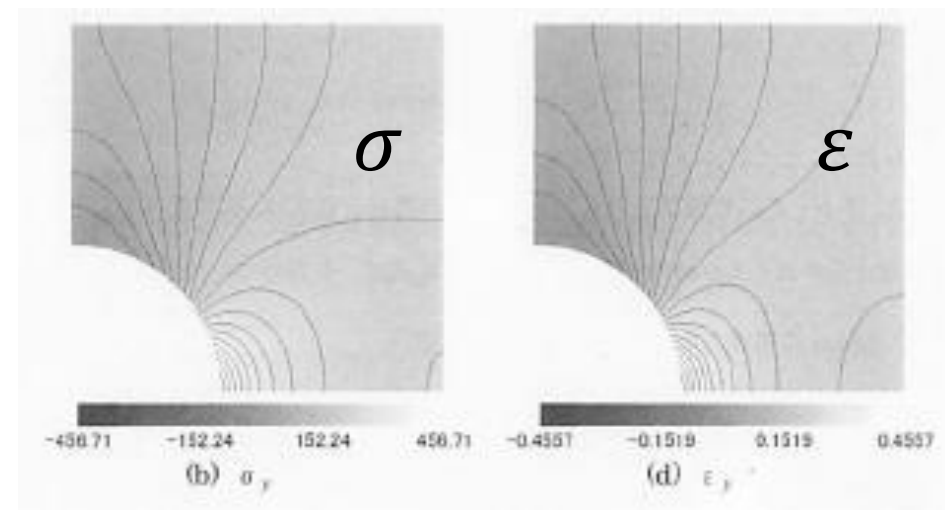
## 応力分布図を表示し、歪み分布図を表示する力学文化の問題点

従来の弾性理論では、応力解析の後、応力分布 $\sigma$ と歪み分布 $\varepsilon$ を表示するのが、一般的となっている。

従来の定義に従う基礎理論では、ポアソン効果によって、応力が存在しなくとも歪みが現れる。

逆に、歪みが生じていてもそこには応力は存在しないとする判断を与える。

すなわち、応力分布図と歪み分布図とが互いに相補的になっていない。



このことから、破壊基準や破壊現象の解釈が様々な形に行われている。しかしながら、それらは従来理論の問題点を取り繕う工夫の必要を余儀なくされており、結果として、木に竹を接ぐ説明となっている。

問題点の一切を解決できる新たな弾性理論が希求される。



# 従来の弾性歪みエネルギーの定義

我々の一般的な見解は、次の通りである。

## 1) バネに対して：

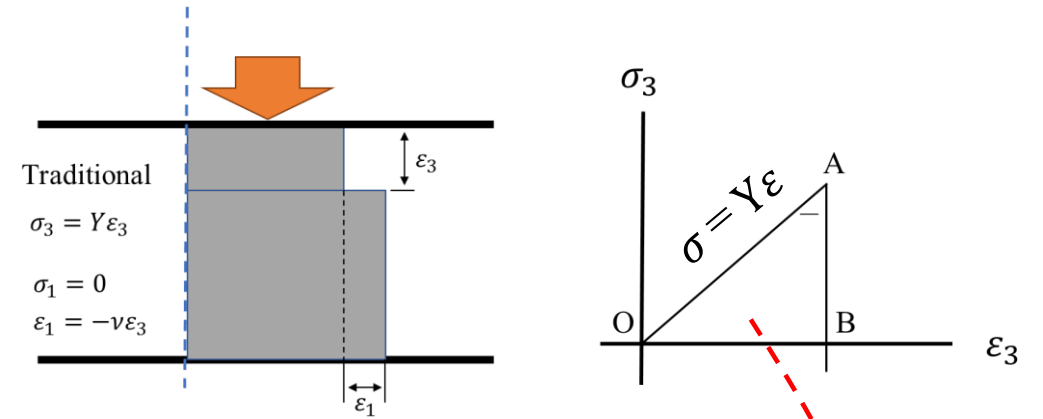
バネの伸び量 $x$ と作用力 $f$ との関係は、フックの法則より、次のように与えられる。

$$f = kx \quad (3)$$

ここに、 $k$ はバネ定数である。

弾性バネに蓄えられるエネルギーは、次のように与えられる。

$$W = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (4)$$



## 2) 弾性棒について：

図に示す一軸圧縮下の弾性棒に蓄えられる弾性エネルギーは、次のように与えられる。

$$W = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon \quad (5)$$

と定義し、

$$W = \frac{1}{2} Y \epsilon_3^2 \quad (6)$$

と与えたなら、それは誤りである。  
すなわち、教科書は間違っている。

## 式(6)の定義はなぜ誤りと言えるのか？

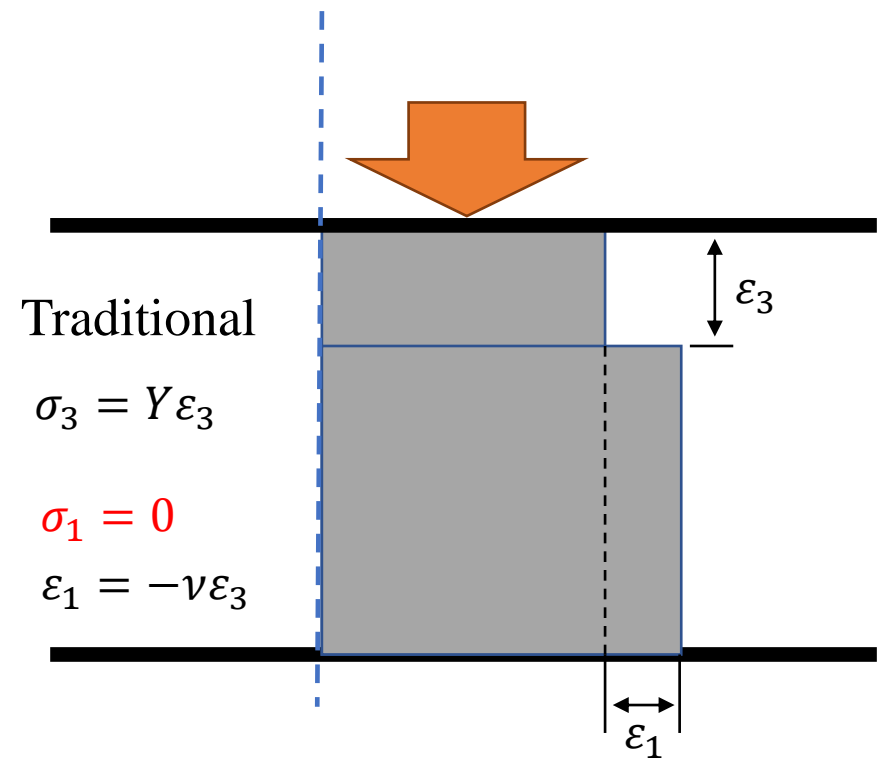
右の図を見ると、材料は縦方向の変形のみではなく、横、奥方向にも変形している。

縦方向の変形に蓄えられる弾性エネルギーが、 $\frac{1}{2}Y\varepsilon_3^2$ と与えられるのなら、横や奥方向の変形に蓄えられる弾性エネルギーが、 $\frac{1}{2}Y\varepsilon_1^2$  や  $\frac{1}{2}Y\varepsilon_2^2$  と与えられるべきでないか？という疑問が湧く。

すなわち、

$$\frac{1}{2}Y\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}Y\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2}Y(\nu\varepsilon_3^2)$$

が不足しているのではないか。



しかしながら、 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ であるから、 $\sigma_1\varepsilon_1 = \sigma_2\varepsilon_2 = 0$ であり、やはり、

$$W = \int \sigma_3 d\varepsilon_3 = \frac{1}{2}Y\varepsilon_3^2$$

が与えられる。

しかし、この結論は誤りである。

# 横及び奥方向の変形は何の 応力によるものか？

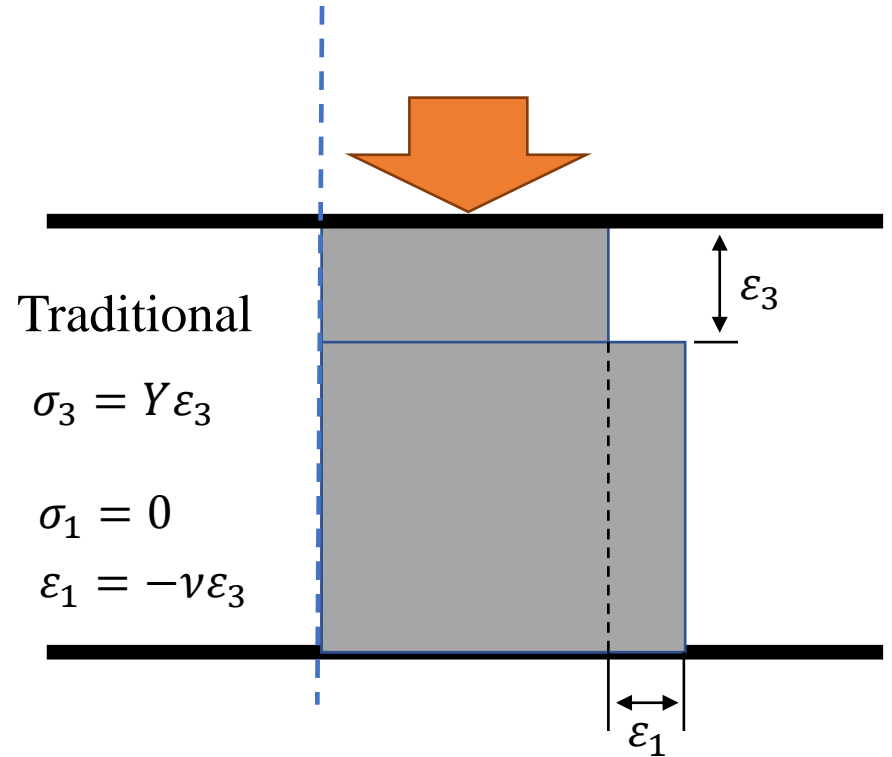
ポアソン効果は何の応力がなす  
ものか？

従来の弾性理論は、この素朴な  
質問に答えていない。

ポアソン効果を引き起こす応力が  
ミッシングとなっている。

このことは、極めて深刻である。

その結果、



$$\sigma_3 = Y \varepsilon_3$$

$$\sigma_1 = 0$$

$$\varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_3$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$

$$W = \sigma_3 \varepsilon_3 = \frac{1}{2} Y \varepsilon_3^2$$

という誤った結果を導いている。

# 従来の弾性歪みエネルギー のさらなる検討

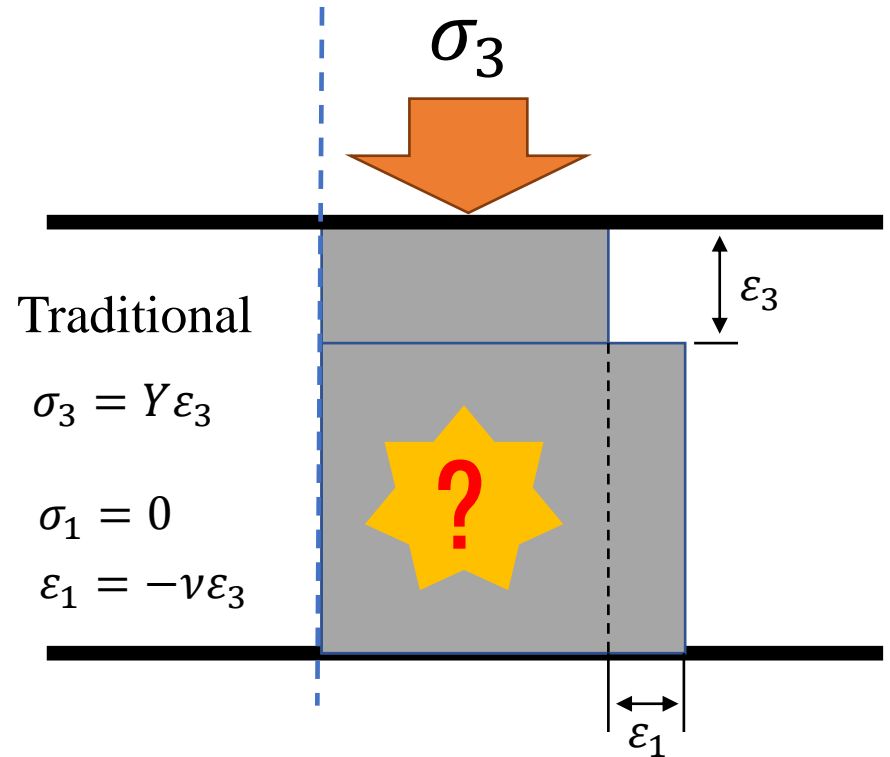
$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} Y \varepsilon_3^2$$

$$G = \frac{Y}{2(1 + \nu)}$$

$$W = \frac{1}{2} \{2(1 + \nu)G\} \varepsilon_3^2 = G \varepsilon_3^2 + G\nu \varepsilon_3^2$$
$$= \underset{\text{縦}}{G \varepsilon_3^2} + \underset{\text{横}}{G\nu \varepsilon_3^2} + \underset{\text{奥}}{??}$$

なぜ、??の分が足りないのか？

横と奥の歪みを生じさせた応力が、  
ミッシングとなっていることによる。



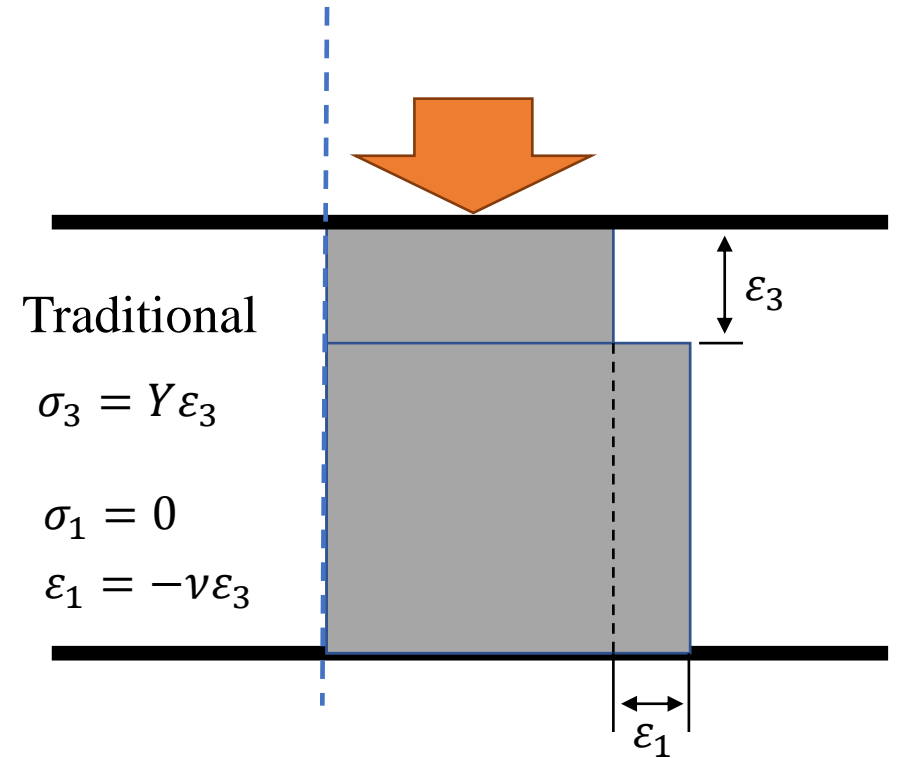
その応力は等方応力であるがゆえに、縦方向にも現れている。

すなわち、縦方向の歪み $\varepsilon_3$ は外力としての応力 $\sigma_3$ の作用のみで発生したのではない。

## フックの法則の再検討

フックは、「バネの自然状態よりの変位とか間隙の大きさと、バネを自然の位置にもどそうとする力とは比例する。」「この法則はバネについてのみ観測されるというものではなく、金属、木、石、れんが、毛髪、角、絹、骨、筋肉、ガラスなどのすべての弾力性のある物体についていえることである。」

フックの説明はバネ以外の物体については、十分ではなかった。

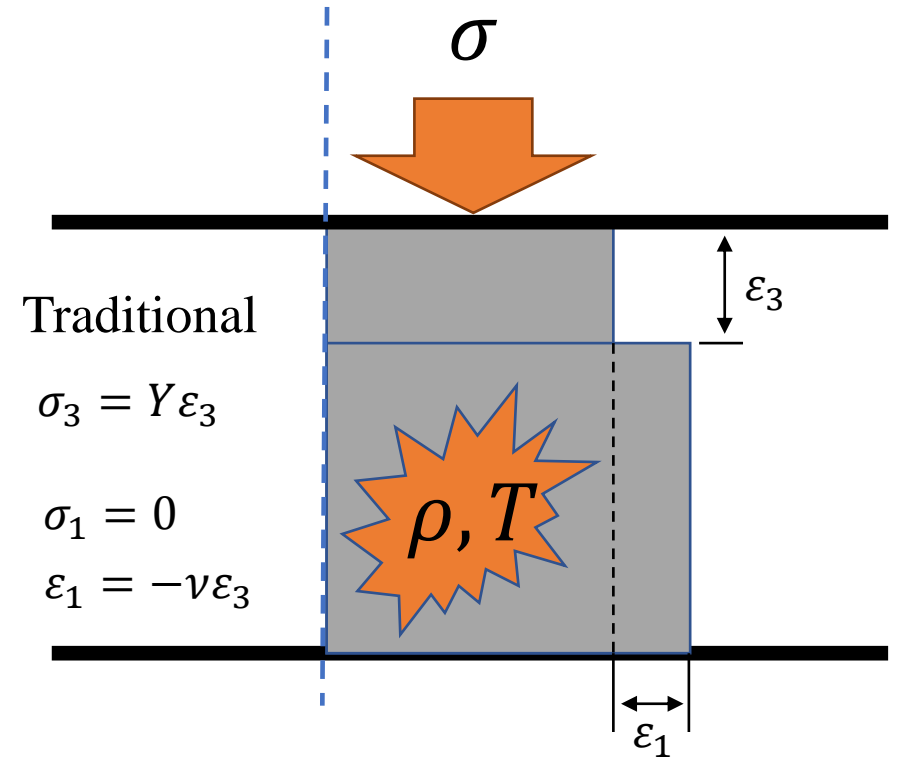


物体は、一般に横及び奥方向にも変形を見せているので、その変形は何の力によるものかをも説明する必要があった。

## 物体に対するフックの法則の修正 (Hooke・Nakazaの法則)

「バネの自然状態よりの変位とか間隙の大きさと、バネを自然の位置にもどそうとする力とは比例する。」 「この法則はバネについてのみ観測されるというものではなく、金属、木、石、れんが、毛髪、角、絹、骨、筋肉、ガラスなどのすべての弾力性のある物体についていえることである。」

しかし、物体は密度変化に対して一般に等方変形を見せる。また、温度の変化によっても一般に等方的な膨張・収縮を見せる。



すなわち、物体の変形は、外部応力の機械的な作用のみでなく、熱力学的な内部応力（圧力）の作用をも受ける。

# 新たなフックの法則に基づく、 等方弾性体の新たな構成方程式

物体の変形は、外部応力の機械的な作用のみでなく、熱力学的な内部応力（圧力）の作用をも受ける。

すなわち、

物体の変形は、圧力の作用と外部  
応力の作用によるものである。

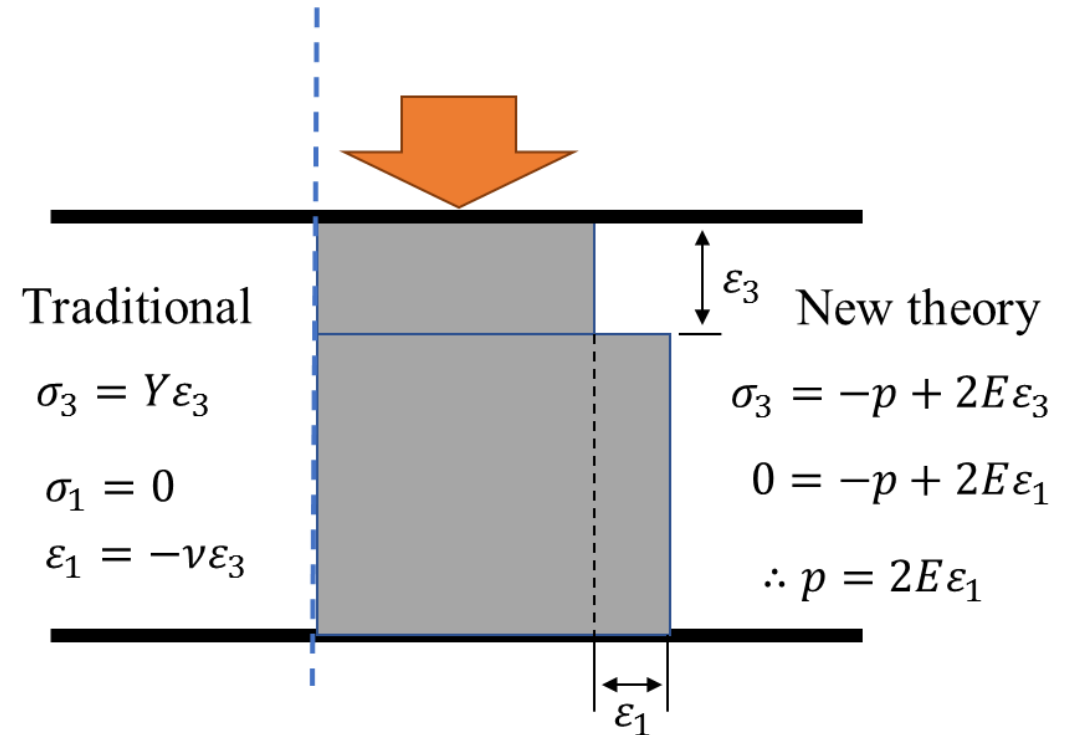
新たな構成方程式：

物体の歪み  $\leq$  圧力 + 外部応力

or

外部応力 = -圧力 +  $E \times$  物体の歪み  
(弾性応力)

$E$ : Elasticity



以下、“弾性定数 × 物体の歪み”  
を、**弾性応力**と呼ぶ。弾性係数を  $E$   
で表す。

# 新たなフックの法則に基づく、 等方弾性体の新たな構成方程式

以上の議論により、等方弾性体の内部応力の新たな構成方程式は、次のように与えられる。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij} \quad (7)$$

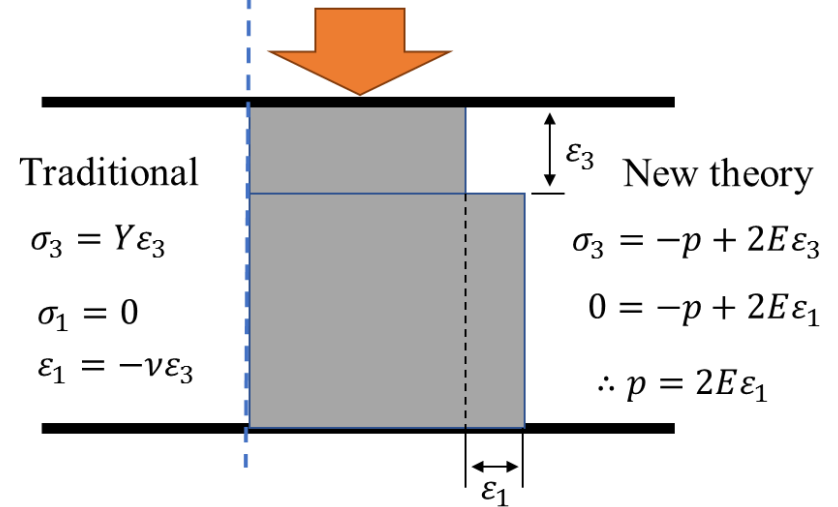
圧力      弾性応力

ここに、 $\sigma_{ij}$ は応力テンソル、 $\varepsilon_{ij}$ は歪みテンソル、 $p$ は圧力、 $E$ は弾性係数、 $\delta_{ij}$ はデルタテンソルを表す。

$i \neq j$  のとき (すなわち、体積変形 or 密度変化・温度変化が無いとき、式(7)は、

$$\sigma_{ij} = 2E\varepsilon_{ij} \quad (8)$$

を与え、応力と歪みが線形比例する。



新たな構成方程式(7)を上図の一軸圧縮問題に適用すると、次のようになる。

$$\sigma_3 = -p + 2E\varepsilon_3 \quad (9)$$

$$0 = -p + 2E\varepsilon_1 \quad (10)$$

$$0 = -p + 2E\varepsilon_2 \quad (11)$$

よって、

$$p = 2E\varepsilon_1 = 2E\varepsilon_2 \quad (12)$$

すなわち、**ポアソン効果は、圧力 $p$ が引き起こす等方変形である。**



# 弾性係数 $E$ 及び圧力の状態方程式

式(12)と式(1)より、次なる関係が与えられる。

$$Y\varepsilon_3 = -p + 2E\varepsilon_3$$

また、式(12)と式(2)より、

$$p = -2E(-\nu\varepsilon_3)$$

これらより、

$$E = \frac{Y}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

すなわち、弾性係数 $E$ は、従来のせん断弾性係数と等価である（修正ヤング率ともいえる）。

式(12)は、圧力の状態方程式を成す。圧力とそれが引き起こす歪みは弾性係数 $E$ を介して、線形関係で結ばれる。

圧力の状態方程式の一般化は、次のように与えられる（等温状態変化）。

式(7)の主応力の和をとって、

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -3p + 2E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$p = -\left(\frac{\sigma_{kk}}{3} - \frac{1}{3}2E\varepsilon_{kk}\right)$$

従来の応力歪み関係式より、

$$\sigma_{kk} = \frac{1+\nu}{1-2\nu}2E\varepsilon_{kk}$$

よって、圧力の状態方程式の一般式を得る。

$$p = 2E\varepsilon_p \quad (14)$$

ここに、

$$\varepsilon_p = -\frac{\theta\varepsilon_{kk}}{\nu} \quad (15)$$

$$\theta = \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (16)$$

式(15)の $\theta$ は、ポアソン比の一種として定義される。 $\varepsilon_p$ は、圧力が引き起こす等方歪みを表す。

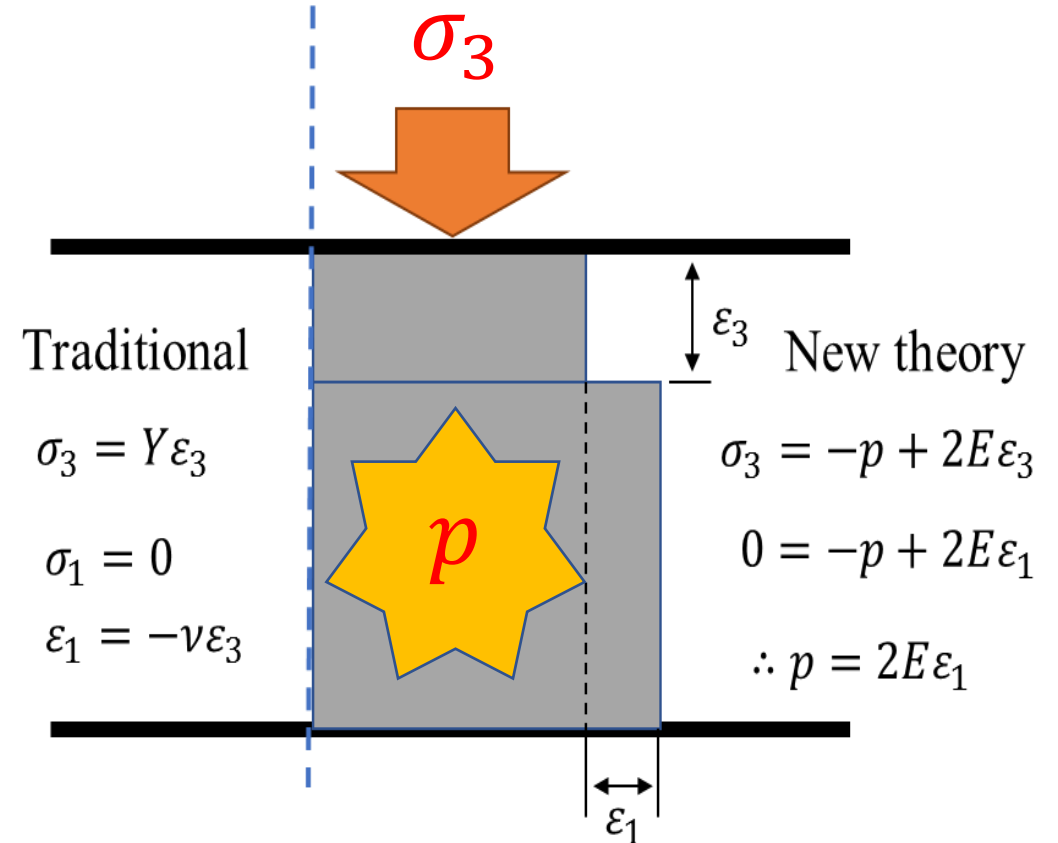
# 新たな弾性理論による弾性歪みエネルギーの定義

$$W = \int (\sigma + p) d\varepsilon = \int (E\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} E \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2} E \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} E \varepsilon_2^2$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} E \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2} E \nu \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2} E \nu \varepsilon_3^2 \quad (17)$$

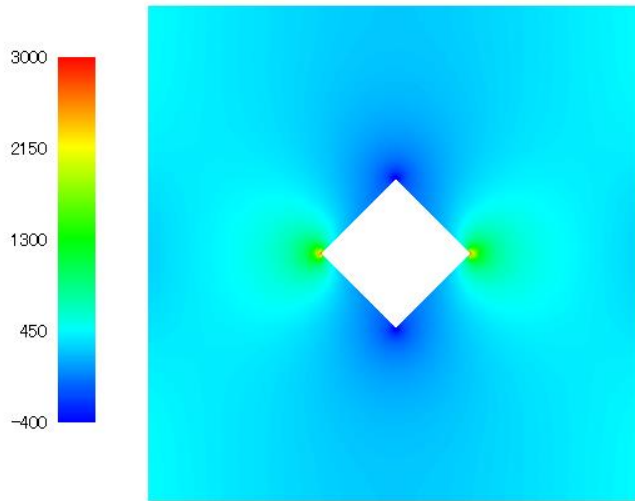
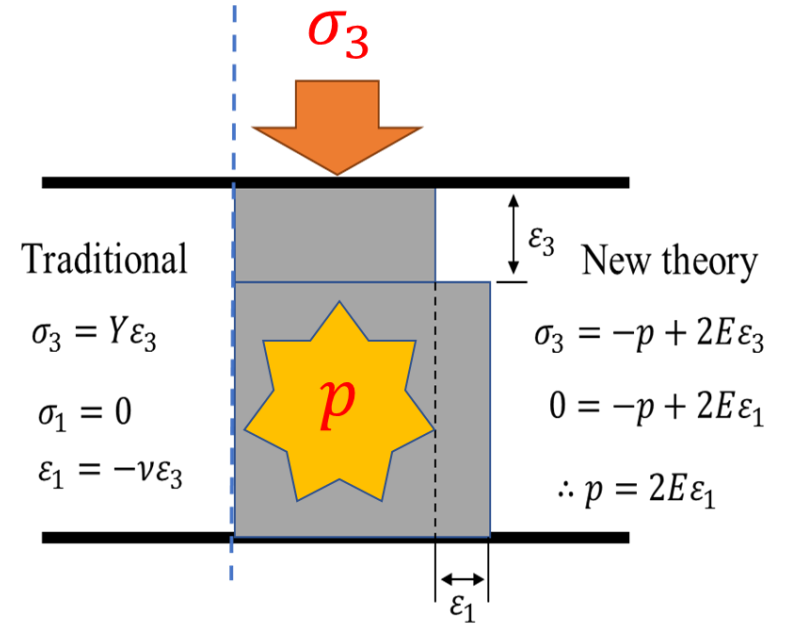
縦
横
奥



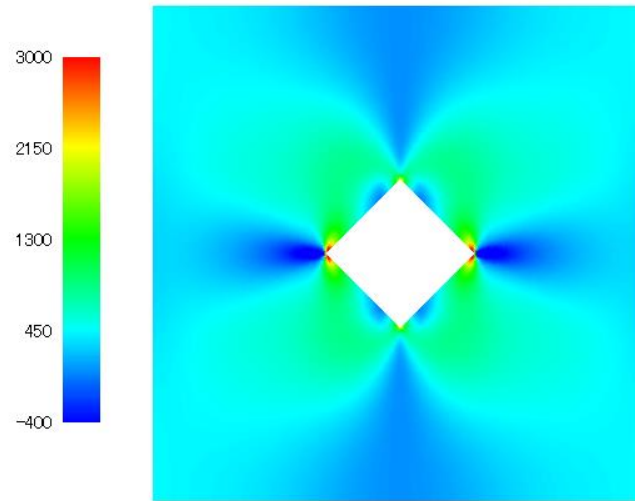
弾性歪みエネルギーは変形箇所にも満遍なく蓄えられる。

# 圧力分布と弾性応力分布を提示する 新たな力学文化

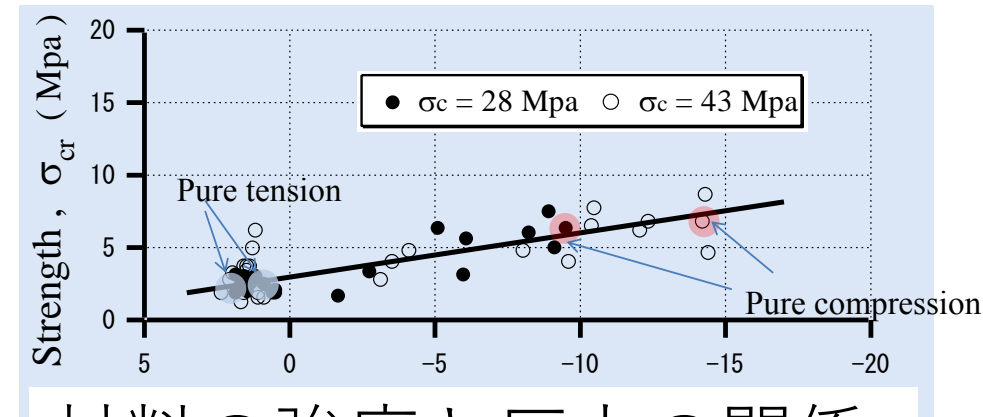
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij} \quad (18)$$



圧力分布



弾性応力分布



材料の強度と圧力の関係

## 従来の弾性理論のまとめ

従来の弾性理論は、ヤング率とポアソン比を用いて、次のように与えられる。式(1)の一般化、

$$\varepsilon_1 = \{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\}/Y$$

$$\varepsilon_2 = \{\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\}/Y$$

$$\varepsilon_3 = \{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\}/Y$$

また、従来のフックの法則によって、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

とおき、等方弾性体に対して、

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$$

を得る。これは、ラメの構成方程式と呼ばれる。λ及びGは弾性係数。

構成方程式は、次のようにも与えられる。

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3)$$

これは、Stokesの構成方程式である。

以上に示す従来の構成方程式はすべて、先に一軸圧縮の例で取り上げた問題を内在している。

すなわち、ポアソン効果を説明する応力がミッシングとなっている。弾性歪みエネルギーが正しく求められない。応力が存在しない箇所にも歪みが現れる。逆に、歪みが現れてもそこに応力が存在するとは限らない。すなわち、応力分布図と歪み分布図とが相補的になっていない。

# 新たな弾性理論のまとめ

材料に作用する外部応力と材料の歪みとの線形関係のみを規定する従来のフックの法則を修正し、材料の密度変化や温度変化に伴って材料内部に生じる圧力変化による材料の歪みの存在を明示した。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij}$$

これによって、従来の弾性理論においてミッシングとなっていた応力が内部圧力 $p$ であったことが示された。

等温状態変化を仮定するとき、圧力の状態方程式は、

$$p = 2E\varepsilon_p$$

と与えられる。ここに、 $\varepsilon_p$ は圧力が引き起こす等方歪みを表す。

以上より、**等方弾性体の弾性定数はただ一つと結論される。それは係数 $E$  (Elasticity)として現れている。**

新たな構成方程式によって、弾性歪みエネルギーが正しく定義された。

新たな弾性理論では、応力分布として圧力分布と弾性応力分布とが与えられ、それらは応力評価に対して相補的となる。

これまでの説明では、従来の弾性理論によるヤング率やポアソン比を適宜用いている。しかし、それらは単に実験等で求めやすい経験定数としての位置付けにある。

温度変化を伴う場合の圧力の状態方程式については、「仲座栄三：新弾性理論、ボーダーインク、97p.、2010」を参照して頂きたい。

おおよそ350年の時を経て、  
Hookeの法則は修正された。

これによって、Naiver(1821)から  
始まった等方弾性体の弾性係数  
論争は解決された。

弾性係数はただの1つであった。

なぜ人は、かくも簡単に思考停止  
になってしまうのか？

違いは、  
見ようとする意志が無ければ見え  
ない。また、聴こうとする意志が  
なければ聞けない。

## 教訓：

数値モデルの構築は、物理的に理に合っている必要がある。  
実験や観測による検証のみでは不十分である。推敲に推敲を重ねる必要がある。



流体力学の基礎理論  
Navier-Stokes方程式  
の誤りを証明する

# 等方弾性体の構成方程式と粘性流体の構成方程式の比較

仲座（2005）の構成方程式は、次のとおりである。

## 1) 等方弾性体

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij}$$

## 2) 粘性流体

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij}$$

---

Stokes(1945)の構成方程式は、次のとおりである。せん断応力を定義されているところが特徴である。

## 1) 等方弾性体

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3) \quad K: \text{bulk modulus}, G: \text{shear modulus}$$

## 2) 粘性流体

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3) \quad \bar{p}: \text{mean pressure}$$

$\mu$ : viscosity coefficient

# Eulerの運動方程式

Euler (1755) は、流体に対して、質量保存則及び運動方程式を次のように与えている。但し、現代的な表記としてある。

## 1) 質量保存方程式

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \mathbf{v} : \text{velocity vector}, \quad \rho : \text{density}$$

## 2) 運動方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}p, \quad p : \text{pressure}$$

# Navierの運動方程式

1821-1824年頃、Navierは、等方弾性体及び流体に対して次のつり合い方程式及び運動方程式を与えている。但し、以下では現代的な表記としてある。

## 1) 等方弾性体について

$$\mathbf{X} + \nabla^2 \mathbf{u} + 2c \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u}: \text{displacement vector}$$

すなわち、 $\sigma_{ij} = 2c(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kk} \delta_{ij})$

## 2) 流体の運動について

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad \mathbf{v}: \text{velocity vector}$$

単一定数理論

# Navierの後の運動方程式

## 1) Poissonの運動方程式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{X} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \mathbf{v}$$

$$\text{すなわち、} \sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

## 2) Stokesの運動方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad} \bar{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v}$$

$$\text{すなわち、} \sigma_{ij} = \bar{p} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - e_{kk} \delta_{ij} / 3)$$

## 2 定数理論

$\mu$ : viscosity coefficient

$\lambda$ : second viscosity coefficient

Navier-Stokes equation

$\bar{p}$ : mean pressure

Stokesの仮説

# なぜ、第2粘性係数や平均圧力が現れたか？

## ニュートンの粘性法則(1687、プリンキピア)

流体の部分で、滑かさの欠如から起こる抵抗は、他のことが同等なら、流体の部分が互いに分離される速度に比例する。

$$\text{すなわち、} \tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

$\tau_{ij}$ : 粘性応力テンソル *viscosity stress tensor*

$e_{kl}$ : 歪み速度テンソル *rate of strain tensor*

$C_{ijkl}$ : 係数テンソル *coefficient tensor*

等方性、対象条件より、 $C_{ijkl}$ の係数が2個になり、

今井功著：流体力学（前編）、pp. 270–284を参照

## 粘性応力

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

ここに、粘性係数 $\mu$ に加えて、第2粘性係数 $\lambda$ が現れる。

2定数理論

# Stokesの展開

## 粘性応力

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$\tau_{kk} = 3\lambda e_{kk} + 2\mu e_{kk}$$

## 内部応力の構成方程式

### 静止流体

$$\sigma_{ij} = -p_s \delta_{ij} \quad p_s : \text{静水圧}$$

### 運動流体

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$p$  : 運動流体の圧力

Stokesは運動流体の  
圧力とは何かを考えた

$$\sigma_{kk} = -3p + 3\lambda e_{kk} + 2\mu e_{kk}$$

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{kk} + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) e_{kk}$$

圧力は、流体の変形速度  
 $e_{kk}$  に依存しないと考えた。  
これを、ストークスの仮説  
と呼ぶ。

したがって、

$$\lambda + \frac{2}{3} \mu = 0$$

が与えられる。

$$\therefore p = -\frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

平均圧力と呼ば  
れるゆえんがこ  
こにある

# Stokesの構成方程式

## Navier-Stokes方程式

粘性応力

$$\tau_{ij} = 2\mu(e_{ij} - e_{kk}/3)$$

ストークスの仮説

$$\lambda = -2\mu/3$$

ニュートン・ストークスの粘性法則

内部応力の構成方程式

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e_{kk}\delta_{ij}/3)$$

$\bar{p}$  : 平均圧力

Navier-Stokes方程式

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = X - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}$$

Cauchyの運動方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}\bar{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v}$$



# Schlichtingの議論 in his Boundary-Layer Theory

球対称な流体運動を考えた

流体運動

$$e_{ij} = \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij}$$

粘性応力

$$\tau_{ij} = \mathbf{0} \quad \text{粘性の作用は無い}$$

内部応力の構成方程式

$$\sigma_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij}$$

$\bar{p}$  : 平均圧力 (完全流体の圧力)

Navier-Stokes方程式

$$\rho \frac{dv}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad} \bar{p}$$

球対称流体運動に対して、永久運動を許すことになる！  
したがって、Stokesの仮説は受け入れ難い。

# Stokesの仮説を受け入れず、第二粘性係数を導入する考え方

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ &= \lambda' e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - e_{kk} \delta_{ij} / 3)\end{aligned}$$

圧力緩和に  
拘わる粘性項

普通の粘性応力項

粘性係数 $\mu$ に加えて、  
第2粘性係数 $\lambda'$ が導入される。

## Navier-Stokes方程式

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{X} - \text{grad}(\bar{p} - \lambda' \text{div}\mathbf{v}) \\ &\quad + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v}\end{aligned}$$

第2粘性係数 $\lambda'$ は、単原子気体については、Stokesの仮説が成立しゼロとなる。しかし、空気など多原子気体からなる流体の運動に対しては、ゼロとならない。常に実験的に求める必要がある。

実験によれば、 $\lambda' \sim \mu$  が得られている。

# 仲座の運動方程式

流体力学の運動方程式は、先に見た従来の弾性理論の支配方程式構築と同じ過ちを犯している。

## ニュートンの粘性法則(1687、プリンキピア)

流体の部分で、滑かさの欠如から起こる抵抗は、他のことが同等なら、流体の部分が互いに分離される速度に比例する。

$$\text{すなわち、 } \tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

①流体の滑かさの欠如は、歪み速度テンソル $e_{ij}$ をもって十分に表される。

等方性、対象条件より、 $C_{ijkl}$ の係数が2個になり、

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \text{①の理由により、 } e_{ij} \text{ のみの項が残る。}$$

粘性応力  $\therefore \tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$  Newton・Nakazaの粘性法則 と呼ぶことができる。

運動方程式 
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v}$$

# 新たな流体運動の基礎方程式

Eulerの質量保存方程式  $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$

粘性応力  $\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$

運動方程式  $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \text{graddiv}\mathbf{v}$

運動エネルギーの散逸関数  $\phi = \frac{1}{2} \mu e_{ij}^2$

# 従来 of 流体運動の基礎方程式

Eulerの質量保存方程式  $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$

粘性応力  $\tau_{ij} = 2\mu(e_{ij} - e_{kk}\delta_{ij}/3)$

運動方程式  $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}\bar{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu \text{graddiv}\mathbf{v}$

$\bar{p}$  は、熱平衡圧として取り扱われる。

運動エネルギーの散逸関数  $\phi = \frac{1}{2}\mu \left( e_{ij}^2 - \frac{2}{3}e_{kk}^2 \right)$

球対称な流体運動に対して、  
エネルギー散逸が生じない。

新たな理論と実験値との  
比較（音波の減衰率）

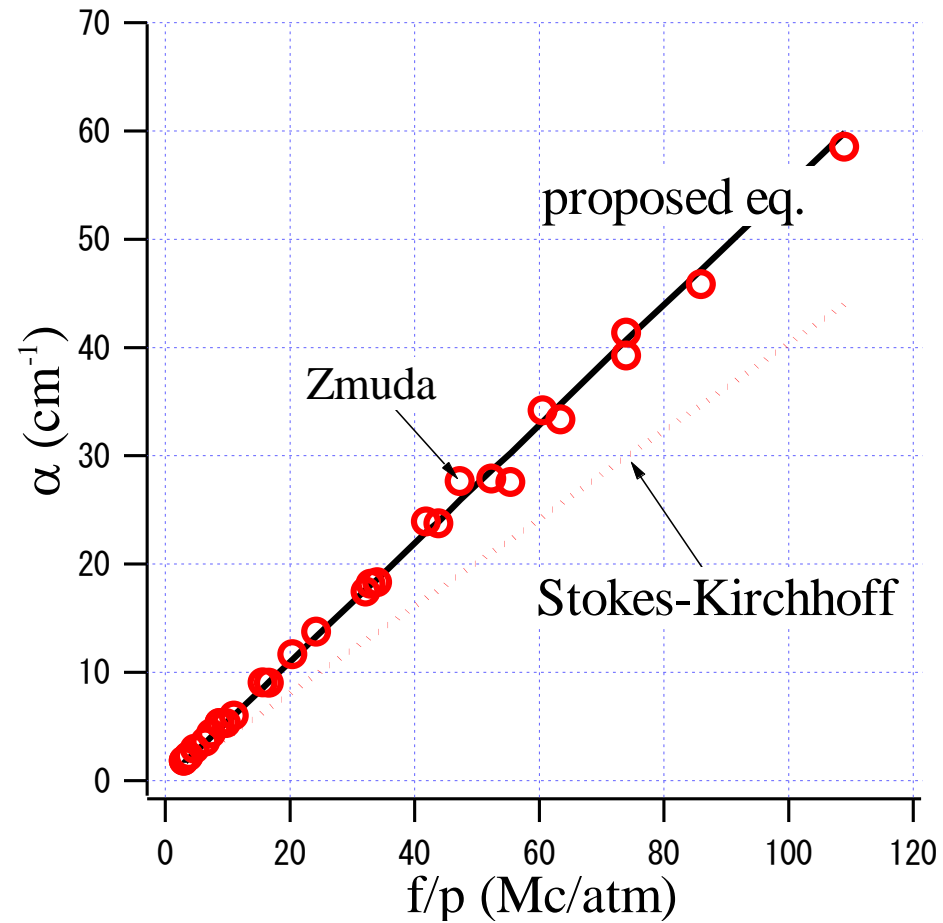


Fig.-1 Comparison between Nakaza's theory and experiment for the attenuation of sound in N<sub>2</sub> gas at 29°C. Attenuation  $\alpha$  is plotted against frequency-pressure ratio in MC./at. (see Zmuda<sup>16)</sup>, Table I, 1951). Stokes-Kirchhoff shows the result from the Navier-Stokes equation.

## 論文や教科書でみる従来の説明

非圧縮流体運動の解析は、次に示す基礎方程式による。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

これらの説明は、誤りである。

---

非圧縮流体運動の運動方程式は、次に示すNavier-Stokes方程式で与えられる。

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

この説明は、誤りである。  
非圧縮流体運動の運動方程式というのは存在しない。

## 推奨される説明

流体運動の支配方程式は、次に示す質量保存方程式及び運動方程式からなる。

Eulerの質量保存方程式

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\text{div}\mathbf{v}$$

Nakazaの運動方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \text{grad}(\text{div}\mathbf{v})$$

非圧縮流体運動に対しては、これらの基礎式が非圧縮条件 ( $\text{div}\mathbf{v}=0$ )の下に解かれる。

# Stokesの言葉（1945）

ストークスの仮説をもって提示した運動方程式に対して、Stokes自身は、「私の理論による解析結果が、実験値と一致したからといって、私の仮説が証明されたことにはならない。なぜなら、我々の身近にある流体運動は、非圧縮的であるからである」とする旨の説明を与えている。



# ニュートンの運動法則の修正

## 従来のニュートンの運動法則

ニュートンの運動法則は、一般に、以下のよう  
に説明されている。

### 1 慣性の法則

物体に力が作用しない限り、静止している  
物体は静止続け、一定速度で運動している  
物体はその運動状態を保つ。

### 2 運動方程式

質量 $m$ の物体に力が作用するとき、物体の  
受ける加速度 $dv/dt$ は作用する力の大きさ $f$   
に比例し、質量に反比例する。

$$mdv/dt = f \quad (1)$$

### 3 作用・反作用の法則

物体に力の作用があるとき、同時にその力  
と反対方向に同じ大きさの力の作用（反作  
用）が存在する。

## 新たな運動法則

運動法則は、静止している物体が動き始める  
瞬間のみに適用される。

### 1 慣性の法則

静止している物体は、それに力が作用しない  
限り静止続ける慣性を有している。物体の慣  
性の大きさは、質量 $m$ によって計られる。

### 2 運動方程式

静止している質量 $m$ の物体に力 $f$ が作用する  
とき、微小時間 $dt$ 内に物体が得る微小速度 $dv$ は、  
運動方程式、

$$mdv = f dt \quad (1)$$

で与えられる。

### 3 作用・反作用の法則

物体に力の作用があるとき、同時にその力と  
反対方向に同じ大きさの力の作用（反作用）  
が存在する。

# 運動している物体の運動の 取り扱い

## ガリレイの相対性理論

### 1、相対性原理

2者の中で、何れが絶対的に静止し、  
いずれが絶対的に運動しているものか  
を決めることはできない。

### 2、ガリレイ変換

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

### 3. 速度の合成則

$$\frac{dx}{dt} = v + \frac{dx'}{dt'}$$

例えば、ガリレイの相対性理論を流体運動に適用すると

運動方程式

$$\rho \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_0 = (\mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v})_0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right)_0 = (\mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v})_0$$

$$(\Delta \mathbf{v})_0 = \Delta t (\mathbf{X} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mu \text{grad} \text{div} \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v})_0 / \rho$$

$$\mathbf{v}_{\text{new}} = \mathbf{v}_{\text{old}} + (\Delta \mathbf{v})_0$$

( )<sub>0</sub> の下添字は、着目している流体粒子の速度に対する  
相対量表す。すなわち、Euler的な速度観測となっている。

運動している物体や、運動している流体を、静止した観測者の立場で、運動している現象として直接取扱う場合、相対性理論が必要となる。そのような取り扱いについては、**新相対性理論—物理的思考編—**（仲座栄三、ボーダーインク、2023）を参照して頂きたい。

最後に、

出来上がったものを見ると、すべてが単純に、そして当たりまえに見える。しかしながら、その創出は、想像を超える努力と執念、そして思考に思考を重ねたことによるものである。

新たな理論体系が、様々な分野に多元的に応用されて、新しい知見が創出されることを期待する。